Nicolas Weyland
July 2011

1 Konfidenzintervall und Schätzen von Parametern

1.1 Konfidenzintervall

$\longrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ für μ wenn σ^2 bekannt

Erwartungswert μ, Varianz $\frac{\sigma^2}{n}$, Verteilung $\mathcal{N}$, $\hat{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$P\Big[-1.96 \leq \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}} \leq 1.96\Big] = 95\%$, $P\Big[\mu \;\epsilon\; \Big[\bar{X} - \dfrac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \dfrac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\Big]\Big] = 95\%$,

CV = critical values for $\mathcal{N}(0,1)$:

95%KI: -1.96, 1.96	99%KI: -2.58, 2.58	90%KI: -1.64, 1.64	80%KI: -1.28, 1.28

$$\boxed{\Big[\bar{x} - \frac{CV \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{CV \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\Big]}$$

$\longrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ für μ wenn σ^2 unbekannt

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma^2}}{n}}} \to \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{(n-1)}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2}{n}}}$$

$$\boxed{\Big[\bar{x} - \frac{CV \cdot \hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{CV \cdot \hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\Big]} \quad , \quad \boxed{\hat{\sigma} := \sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2}}$$

Sei $X \sim Bin(n,p)$, dann ist unser Schätzer $\hat{p} = \frac{X}{n}$, nicht E[X]! Weil:
$Var(\hat{p}) = Var\Big(\dfrac{X}{n}\Big) = \dfrac{1}{n^2} \cdot Var(X) = \dfrac{1}{n^2} \cdot n \cdot p \cdot (1-p) = \dfrac{p \cdot (p-1)}{n}$

KI: Schätzer $\pm$ CV $\cdot sd$(Schätzer)
$KI : \hat{p} \pm \text{CV} \cdot \sqrt{\dfrac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}$, wie gross muss n sein, damit Schwelle T nicht mehr da bei sei? CV$\cdot sd(p) \leq T \to$ CV $\cdot \sqrt{\frac{(p)(1-p)}{n}} \leq T$

1.2 Schätzen

Geschätztes hat offenbar ein $\hat{\text{D}}\hat{\text{a}}\hat{\text{c}}\hat{\text{h}}\hat{\text{l}}\hat{\text{i}}$

sind $X_1, ..., X_n$ iid $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dann hat $\bar{X}$ eine $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$-Verteilung.
Standard**fehler** (sd): $\sigma_{\bar{X}} := sd[\bar{X}] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

σ ist normalerweise nicht bekannt, wir schätzen es mit: $s := \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2}$

Den Standardfehler schätzen wir dann so $s_{\bar{X}} := \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$

1.3 Schätzer

$\hat{\mu}$:
Normalverteilt siehe oben $\bar{x}$

Binomial $Bin(n, p) \rightarrow p = \hat{p}$

Exponential $Exp(\lambda) \rightarrow = \frac{1}{\lambda}$

Poisson $Po(\lambda) \rightarrow \lambda$

$\hat{\sigma}$:
Normalverteilt siehe oben $\hat{\sigma}$

Binomial $Bin(n, p) \rightarrow \sigma_{\bar{x},\text{binom}} = \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}$

Exponential $Exp(\lambda) \rightarrow \sigma_{\bar{x},\exp} = \frac{1}{\lambda\sqrt{n}}$

Poisson $Po(\lambda) \rightarrow \sigma_{\bar{x},\text{poisson}} = \sqrt{\frac{\lambda}{n}}$

2 ANOVA

$\mathcal{H}_0 := \mu_1 = \mu_2 = \mu_k, \mathcal{H}_1 := \exists i, j, i \neq j, \mu_i \neq \mu_j$, Voraussetzung: σ^2 muss gleich sein

2.1 flow pattern

1. Daten gruppieren, k = Anzahl Gruppen, n = Anzahl Daten total, n_k = Anzahl Daten in Gruppe k
2. Durchschnitte der Gruppen berechnen, $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \cdots \bar{y}_k$
3. GM grand mean berechnen $\frac{1}{n}(n_1 \cdot \bar{y}_1 \cdots n_k \cdot \bar{y}_k) \leftarrow$ gewichtet, oder einfach $\sum$ aller Daten durch n teilen

4. $SS_G \rightarrow \bar{y}_i - GM$ bzw. $(\bar{y}_i - GM)^2$
5. $SS_G = \sum n_k \cdot (\bar{y}_i - GM)^2$ Also für jede Gruppe **Anzahl Daten in Gruppe** $\cdot$ (Gruppendurchschnitt - GM)^2

6. $SS_E \rightarrow y_{ij} - \bar{y}_i$ bzw. dann $(y_{ij} - \bar{y}_i)^2$, d.h. für jeder Datenpunkt einer Gruppe - den Durchschnitt seiner Gruppe, dieses Ergebnis ist dann zu quadrieren
7. $SS_E = \sum(y_{ij} - \bar{y}_i)^2$ d.h. die Summe aller berechneten $(y_{ij} - \bar{y}_i)^2$
8. Freiheitsgrade: $df_G = k - 1$, $df_E = n - k$
9. $MS_G \rightarrow SS_G/df_G$, $MS_E \rightarrow SS_E/df_E$
10. $F = V = \frac{MS_G}{MS_E}$
11. $\rightarrow \mathcal{H}_0$ verwerfen, falls $V > F_{krit}, F_{krit} = F_{k-1,n-k} = F_{df_G,df_E} = F_{m,n}$, done

    ANOVA Table:

	df	SS	MS	F
G				
E				

3 OLS

$Y_i = \overbrace{\beta_0}^{q} + \overbrace{\beta_1}^{m} \cdot x_i + \overbrace{\epsilon_1}^{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}$, $\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 \cdot x_i + \epsilon_1$

3.1 flow pattern

$\hat{\beta}_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}, \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \cdot \bar{x}$, data is x_i and y_i

1. Tabelle erstellen x_i und y_i
2. $\bar{x}, \bar{y}$
3. $\rightarrow$ SS_{xx} : berechne $(x_i - \bar{x})$, dann $(x_i - \bar{x})^2$, dann die Summe dieser Werte: $SS_{xx} = \sum(x_i - \bar{x})^2$
4. $\rightarrow SS_{xy}$: berechne $(y_i - \bar{y})$
5. dann $SS_{xy} = \sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$ die Summe aller dieser einzelnen Multiplikationen
6. $\rightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}$
7. $\rightarrow \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \cdot \bar{x}$, done

3.2 OLS-Test

$\mathcal{H}_0 := \beta_1 < 0, \mathcal{H}_1 := \beta_1 > 0$ **oder** $\mathcal{H}_0 := \beta_1 < 0, \mathcal{H}_1 := \beta_1 < 0$
$\rightarrow$T-Test: n = Anzahl Daten im Datensatz, $n - 2$ = df unserer T Verteilung!

$$T_{n-2} := \frac{\hat{\beta}_1 - \overbrace{\beta_1}^{\text{aus } \mathcal{H}_0}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}}$$

1. $\hat{\beta}_1$ aus OLS, z.B. $\beta_1 = 0$ (aus $\mathcal{H}_0$)
2. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ aus OLS

3. $\sigma^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{Y}_i)^2$, wobei $\widehat{Y}_i$ jeweils der Wert ist, den wir erhalten, wenn wir x_i in unsere geschätzte OLS Gleichung $Y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_i$ einsetzen
4. T value berechnen, T_{krit} finden ($df = n - 2$), **einseitig!!!**
5. decision: (refer to T-Test
   $\mathcal{H}_0 := \beta_1 < 0, \mathcal{H}_1 := \beta_1 > 0$
   $\mathcal{H}_0$ ablehnen, wenn $T_{obs} > T_{krit}$

   $\mathcal{H}_0 := \beta_1 > 0, \mathcal{H}_1 := \beta_1 < 0$
   $\mathcal{H}_0$ ablehnen, wenn $T_{obs} < -T_{krit}$

3.3 Korrelationskoeffizient

für empirischer Korrelationskoeffizient r_{xy} gilt: $-1 \leq 0 \leq 1$,
$r_{xy} = -1 \rightarrow$ negative Steigung,
$r_{xy} = +1 \rightarrow$ positive Steigung,
$|r_{xy}| \rightarrow$ Punkte alle auf einer Gerade

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2\right)}}$$

1. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = SS_{xy}$ aus OLS
2. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = SS_{xx}$ aus OLS
3. $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ berechnen!!! nicht der aus T!
4. calculate r_{xy}, done

4 T-Test

T-Test

- 1 Stichprobe (x_i) →

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$

$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$

$df = n - 1$

$T_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}}$

- 2 gepaarte Stichproben (a_i, b_i) → Berechne $x_i = a_i - b_i$ Bei 10 Personen n = 10, nicht n = 20!

- 2 Stichprobe unabhängige (x_i, y_i) →

$\bar{x} = \frac{1}{m}\sum x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i$
$df = m + n - 2$

$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ and $S_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$

$$T_{obs} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\frac{S_{xx} + S_{yy}}{m+n-2}}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{m+n-2}}}$$

Decision:

$\mathcal{H}_0$	$\mathcal{H}_1$	quest
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert T_{obs}\rvert > T_{krit}$?
$(*)\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$T_{obs} > T_{krit}$?
$(*)\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$T_{obs} < -T_{krit}$?

$(*)$: Einseitig

$\boxed{\text{Tabelle} \rightarrow T_{krit}}$

$\boxed{\text{Falls Frage bejaht} \rightarrow \mathcal{H}_0 \textbf{ verwerfen}}$

$\boxed{\mathcal{H}_1 \text{ ist immer das, was man zeigen möchte}}$

$\mathcal{H}_0$	$\mathcal{H}_1$	quest
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\lvert T_{obs}\rvert > T_{krit}$?
$(*)\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$T_{obs} > T_{krit}$?
$(*)\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$T_{obs} < -T_{krit}$?

$(*)$: Einseitig

5 Verteilungen

5.1 Normalverteilung

Notation: $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Parameter: μ, σ^2

Dichtefunktion: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Verteilungsfunktion: $F(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$

Erwartungswert: $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(\sigma X + \mu) = \sigma \underbrace{\mathrm{E}(X)}_{=0} + \mu = \mu$

Varianz: $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(\sigma X + \mu) = \sigma^2 \underbrace{\mathrm{Var}(X)}_{=1} = \sigma^2$

Standardabweichung: $\sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sigma$

Remark: Verteilungsfunktion $\rightarrow \Phi_{\mu,\sigma} = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) \sim \mathcal{N}(0,1) \longleftarrow$ **Z-Transformation!**

5.2 Binomialverteilung

Notation: $Bin(n, p)$

Parameter: $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in [0, 1]$

Dichtefunktion: $P(X = k) = \dbinom{n}{k}\, p^k (1-p)^{n-k}$

Verteilungsfunktion: NIL

Erwartungswert: np

Varianz: $np(1-p)$

5.3 Poisson

Notation: $Po(\lambda)$

Parameter: λ, k

Dichtefunktion: $P_\lambda(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$

Verteilungsfunktion: NIL

Erwartungswert: λ

Varianz: λ

Remark: entspricht für $n > 10$ und $p < 0.05$ ungefähr Binomialverteilung

5.4 Exponentialverteilung

Notation: $Exp(\lambda)$

Parameter: λ

Dichtefunktion: $f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Verteilungsfunktion: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\lambda(t)\ \mathrm{d}t = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$

Erwartungswert: $\mathrm{E}(X) = \int\limits_{0}^{\infty} \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\lambda}$

Varianz: $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}$

Remark: Halbwertszeit = Median = $\tilde{x} = \frac{\ln 2}{\lambda}$

5.5 Bernoulli-Verteilung

Notation: $Be(p)$

Parameter: p, $q = 1 - p$

Dichtefunktion: $\mathrm{P}(X = 1) = p$ and $\mathrm{P}(X = 0) = q = 1 - p$

Verteilungsfunktion: $F_X(t) = \mathrm{P}(X \leq t) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } t < 0 \\ 1-p, & \text{wenn } 0 \leq t < 1 \\ 1, & \text{wenn } t \geq 1 \end{cases}$

Erwartungswert: $\mathrm{E}(X) = p$

Varianz: $\mathrm{Var}(X) = p(1 - p) = pq$

5.6 $\mathcal{X}^2$

Notation: $X_n = Z_1^2 + \ldots + Z_n^2 \qquad Z_k \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad k = 1, \ldots, n$

Parameter: ν

Dichtefunktion: $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

Verteilungsfunktion: $F_n(x) = P(\frac{n}{2}, \frac{x}{2})$

Erwartungswert: $\mathrm{E}\left(\chi_n^2\right) = n$

Varianz: $\mathrm{Var}(\chi_n^2) = 2n$

Remarks: Teststatistik: $\mathcal{X}^2 = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{(x_i - t_i)^2}{t_i} = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{(\text{beob} - \text{erw})^2}{\text{erw}}$

$\mathcal{X}^2 = \mathcal{X}_1^2 + \mathcal{X}_1^2 ... + \mathcal{X}_\nu^2$, $\nu =$ Freiheitsgrade und ist genau $\nu = k - 1$, wobei k die Anzahl Klassen (Beobachtungen / Summen) ist

$P(\mathcal{X}_{\alpha,\nu}^2) = \alpha$, genau kritischer Wer: $\mathcal{X}_{\alpha,\nu}^2 = \mathcal{X}_\nu^2$, $\mathcal{H}_0$ ablehnen, wenn $\mathcal{X}_{\alpha,\nu}^2 > \mathcal{X}_\nu^2$ ist, wobei $\mathcal{H}_0$ bedeutet: Gleichverteilung, also unverfälschter Würfel / Mendelregel / Voraussage (Abweichung Zufall), $\mathcal{H}_1$ Abweichung nicht Zufall!

Eine $\mathcal{X}^2$ Verteilung mit 2 Freiheitsgraden ist eine $Exp(\lambda)$ Verteilung mit $\lambda = \frac{1}{2}$

Sei U_m und V_n zwei unabhängige $\mathcal{X}^2$-verteilte Zufallsvariabeln mit Freiheitsgraden m und n, so ist der Quotient: $F_{m,n} = \frac{U_m/m}{V_n/n}$ eine Zufallsvariabel W, die der F-Verteilung mit den Freiheitsgraden (m,n) genügt.

5.7 Geometrisch

Notation: $Ge(p)$

Parameter: p

Dichtefunktion: $\mathrm{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1} \quad (l = 1, 2, \dots)$

Verteilungsfunktion: $F(k) = \mathrm{P}(X \leq k) = p\sum_{i=1}^{k} q^{i-1} = p\sum_{i=0}^{k-1} q^i = p\frac{q^k-1}{q-1} = 1 - q^n = 1-(1-p)^n$

Erwartungswert: $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$

Varianz: $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$

Remark: Variante A: sie die Wahrscheinlichkeit besitzt, dass man genau n Versuche benötigt, um zum ersten Erfolg zu kommen.

5.8 Uniform (stetige Gleichverteilung)

Notation: $U[a,b]$

Parameter: a, b

Dichtefunktion: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Verteilungsfunktion: $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$

Erwartungswert: $\mathrm{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b x \cdot 1dx = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$

Varianz: $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2$

Standardabweichung: $\sigma_x = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$

5.9 F

$\rightarrow$ refer to $\mathcal{X}^2$ Erwartungswert: $\mathrm{E}(W) = \frac{n}{n-2}$ wenn $n > 2$

Varianz: $\mathrm{V}(W) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$

5.10 t

Sei Y $\mathcal{N}(0,1)$ und Z eine $\mathcal{X}_n^2$ Zufallsvariable, Y unabhängig von Z, dann ist

$T_n := \dfrac{Y}{\sqrt{\frac{Z}{n}}}$, fast $\mathcal{N}(0,1)$ verteilt, aber nicht ganz.

Erwartungswert: $\mathrm{E}(t_n) = 0$, falls $n > 1$, falls $n = 1$, existiert er nicht

Varianz: $\mathrm{V}(t_n) = \frac{n}{n-2}$, falls $n > 2$

Remark: $\sqrt{F_{1,n}} = |t_n|$

5.11 Pareto

Notation: $Par(k, x_{min})$, $k > 0$ und $x_{min} > 0$

Parameter: k, x_{min} innerhalb Intervall $[x_{min}, \infty]$

Dichtefunktion: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x_{\min}} \left(\dfrac{x_{\min}}{x}\right)^{k+1} & x \geq x_{\min} \\ 0 & x < x_{\min} \end{cases}$

Verteilungsfunktion: $P\{X \leq x\} = F(x) = \int_{x_{\min}}^{x} f(t)\,dt = 1 - \left(\frac{x_{\min}}{x}\right)^k, \quad \forall x \geq x_{\min}$

Erwartungswert: $\mathrm{E}(X) = \begin{cases} x_{\min}\dfrac{k}{k-1} & k > 1 \\ \infty & k \leq 1 \end{cases}$

Varianz: $\mathrm{Var}(X) = \begin{cases} x_{\min}^2 \left(\dfrac{k}{k-2} - \dfrac{k^2}{(k-1)^2}\right) = x_{\min}^2 \dfrac{k}{(k-2)(k-1)^2} & k > 2 \\ \infty & k \leq 2 \end{cases}$

Standardabweichung: $\sigma(X) = \frac{x_{\min}}{k-1}\sqrt{\frac{k}{k-2}}$

5.12 stetig / diskret

Diskrete Verteilungen

- Bernoulli $Be(p)$
- Binomial $Bin(n, p)$
- Geometrisch $Ge(p)$
- Poisson $Po(\lambda)$
- diskret uniform = Bernoulli

Stetige Verteilungen

- Uniform $U[a, b]$
- (Negativ)-Exponential $Exp(\lambda)$
- Pareto $Par(k, x_{min})$
- Normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- $\mathcal{X}^2$
- F
- t (student-t)

6 Dichte / Verteilungsfunktion

Dichtefunktion $\rightarrow f(x)$, Verteilungsfunktion $\rightarrow F(x)$, $F'(x) = f(x)$

für stetige Zufallsgrösse Y: $F_Y(a) := P[Y \leq a] = \int_{-\infty}^{a} f(u)du$, wobei $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Bsp. sei Zufallsgrösse X, Dichtefunktion $f_X(x) = Kx$ für das Intervall $[0, 4]$ definiert. Konstante K, Erwartungswert, Varianz, Verteilungsfunktion und $P[X \in [-1, 3]]$

K: $\int_0^4 Kxdx = Kx^2 \frac{1}{2}\Big|_0^4$, $E[X] = \int_0^4 xf(x)$, $V[X] = \int_0^4 (x - E[X]x)^2$

$F_x(a) := \int_0^a x \cdot K = Kx^2 \frac{1}{2}\Big|_0^a = \frac{a^2}{2 \cdot K}$

$$F_a(x) = \begin{cases} 0 & a \leq 0 \\ \frac{a^2}{2K} & a \in [0, 4] \\ 1 & a \geq 1 \end{cases}$$

6.1 Erwartungswert / Varianz / sd

Diskrete Zufallsgrössen ($\mu = E[X]$)

$$E[X] = \sum_{x_i} x_i \cdot P[x_i]$$
$$V[X] = \sum_{x_o} (x_i - \mu x)^2 \cdot P[x_i]$$
$$E[X^2] = \sum_{x_i} x_i^2 \cdot P[X = x_i]$$

stetige Zufallsgrössen ($\mu = E[X]$)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$
$$V[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu x)^2 \cdot f(x)dx$$
$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx$$

Generell:

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$, $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$, $E[b] = b$, $E[0] = 0$

$V[aX + b] = a^2 V[X]$, konstante b geht verloren, a geht quadratisch raus!
$V[aX] = a^2 V[X], V[\frac{X}{n}] = \frac{1}{n^2} V[X]$

Standardabweichung $\neq$ Standardfehler, Standardabweichung $= sd[X] = \sqrt{Var[X]}$
Standard**fehler** $= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ und ist was anderes!

7 α-, β-Fehler [1]

Fehler 1. Art = α-Fehler: $\mathcal{H}_0$ ist wahr, aber durch einen Test wird mit einer best. Irrtummswahrscheinlichkeit $\mathcal{H}_1$ gewählt.

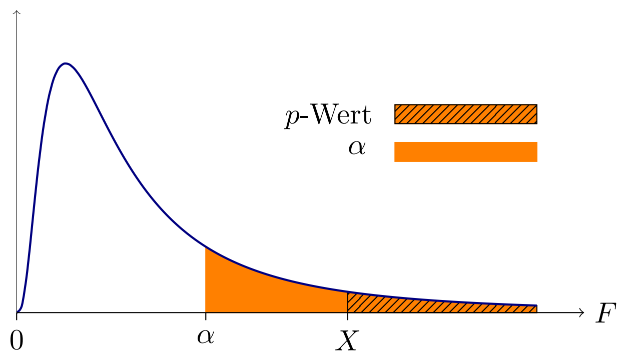
Fehler 2. Art = β-Fehler: $\mathcal{H}_1$ wird durch einen Test zurückgewiesen, obwohl sie wahr ist.

	Wahrer Sachverhalt $\rightarrow \mathcal{H}_0$	Wahrer Sachverhalt $\rightarrow \mathcal{H}_1$
durch einen statistischen Test fällt eine Entscheidung für $\mathcal{H}_0$	richtige Entscheidung (Spezifität) Wahrscheinlichkeit: 1-α	Fehler 2. Art Wahrscheinlichkeit: β
durch einen statistischen Test fällt eine Entscheidung für $\mathcal{H}_1$	Fehler 1. Art Wahrscheinlichkeit: α richtige Entscheidung	Wahrscheinlichkeit: 1-β (Power, Sensitivität, Teststärke)

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Fehler_1._Art

8 p-Wert

Immer in Zusammenhang mit bestimmtes Signifikianzniveau α! Je kleiner p-Wert, desto "besser" wurde $\mathcal{H}_0$, wenn überhaupt, verworfen.



$p < \alpha \longrightarrow \mathcal{H}_0$ ablehnen
$p > \alpha \longrightarrow \mathcal{H}_0$ annehmen
$p = \alpha \longrightarrow$ naja, knapp